G. VANNI (Roma - Italia)

OSSERVAZIONI SULLE TEORIE DELLA PROPAGAZIONE DELLE ONDE HERTZIANE ED IN PARTICOLARE SULLE TEORIE ELETTRO E MAGNETO-IONICHE

§ 1. - Scopo della presente comunicazione, è di richiamare l'attenzione degli studiosi sopra alcuni punti delle teorie della propagazione delle onde elettromagnetiche e più specialmente di quelle dette teorie elettro e magneto-ioniche, considerando, in particolar modo, il poderoso lavoro del prof. P. O. PEDERSEN di Copenhaghen pubblicato nel 1927, avente per titolo: *The propagation of Radio Waves*, di cui l'illustre autore diede conoscenza allo scrivente a Washington, in occasione della Conferenza Internazionale Radiotelegrafica.

§ 2. - Allo stato attuale della scienza non esiste, come è noto, una teoria completa della propagazione dei segnali radiotelegrafici, la quale renda conto, in modo esauriente, di tutti i fenomeni estremamente complessi che essa presenta, e che sono stati messi in luce specie in questi ultimi anni. Esiste, tuttavia, un insieme molto notevole di lavori, elaborati da eminenti fisici e matematici. Fra questi, il lavoro del prof. PEDERSEN costituisce, a mio avviso, uno dei più esaurienti e più completi, sia dal punto di vista teorico come da quello tecnico e pratico. Ritengo fare cosa estremamente utile per i giovani studiosi, di richiamare l'attenzione su di esso, cominciando col preporre alcune considerazioni generali sui caratteri delle diverse teorie di propagazione delle onde elettromagnetiche, anteriori a quelle fondate sui fenomeni elettro e magneto-ionici.

§ 3. - Le teorie della propagazione delle onde elettromagnetiche si possono porre in relazione alle due classiche scoperte fatte, una da HERTZ, nel 1887, sul modo di produrre sperimentalmente le onde che da lui presero il nome e che le teorie di MAXWELL avevano divinato, e l'altra del MARCONI, il quale, nel 1895, trovò il modo di utilizzare tali onde per l'invio dei segnali a distanza senza fili conduttori, portando successivamente le distanze di trasmissione, da pochi chilometri, a varie migliaia, quando, nel 1901, potè trasmettere dei segnali attraverso l'Atlantico da Poldhu, in Inghilterra, al Capo Breton nel Canadà, a circa 4000 Km. creando così la radiotelegrafia transoceanica.

§ 4. - In relazione alle sopra indicate scoperte, le teorie della propagazione delle onde elettromagnetiche si possono riferire a *tre* grandi periodi: il primo, anteriore alla scoperta della radiotelegrafia, va dal 1887 al 1901, vale a dire dalla scoperta di HERTZ a quella della radiotelegrafia transoceanica, fatta dal MARCONI utilizzando onde lunghe. Il secondo periodo comprende l'intervallo dal 1901 al 1922, epoca in cui, riprendendo la via già segnalata dal MARCONI nel 1916 e 1919, si utilizzano, dai radiodilettanti, le onde corte di circa 200 metri per l'invio di segnali attraverso l'Atlantico tra l'Europa e gli Stati Uniti. Infine, il terzo ed ultimo periodo, in cui le onde corte e ultra corte fino a pochi metri di lunghezza sono in piena efficienza, va dal 1922 ad oggi.

§ 5. - **1° Periodo.** — Le teorie della propagazione del primo periodo comprendono principalmente l'opera magistrale di HERTZ (1) il quale, oltre ad avere scoperto il modo di ottenere le onde elettromagnetiche per mezzo del suo classico oscillatore simmetrico a capacità localizzate terminali, calcolandone il periodo, la lunghezza d'onda ed il decremento, tratta il problema della propagazione delle onde così generate, nella ipotesi della terra piana e perfettamente conduttrice a contatto con una atmosfera perfettamente isolante. Trova, inoltre, l'espressione del campo elettrico e magnetico dell'oscillatore a distanza, mettendo, per il primo, in evidenza la distinzione tra l'azione *induttiva* del campo e quella di *irradiazione*, della quale, per mezzo del teorema di POYNTING, calcolò il valore e il decremento. Furono così, da HERTZ, poste le basi scientifiche di quasi tutte le relazioni empiriche o semiempiriche, di cui si avvalsero i tecnici nei primi periodi della telegrafia senza fili.

§ 6. - È bene osservare che, avendo HERTZ in mira, nelle sue classiche ricerche, di mettere in evidenza l'analogia tra le onde da lui scoperte e le onde luminose, egli cercò di produrre onde che, per la loro lunghezza e frequenza, si accostassero il più possibile a quelle luminose, vale a dire onde di alcuni metri o meno; e ciò anche perchè, utilizzando le proprietà riflettenti dei conduttori, analoghe a quelle delle superficie speculari per la luce, fosse possibile concentrare la energia di tali onde per mezzo di riflettori sferici o parabolici, analoghi a quelli adoperati in ottica. Come fa giustamente osservare il MARCONI in una conferenza fatta nel Giugno 1922, all'Istituto dei radio Ingegneri di New York (2) lo studio e l'uso delle onde corte *datano quindi dal 1887*, dall'epoca, cioè, delle classiche ricerche di HERTZ e dei suoi contemporanei (fra cui il nostro illustre RIGHI) giacchè in tutte queste esperienze si utilizzarono onde corte ed ultra corte,

---

(1) Wiedemann Ann., Bd. 31, 1887. — HERTZ: Electric Waves, English Trans., E. Jones, London, 1900.

(2) Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones (1923), p. 443.

variabili da alcuni metri a pochi decimetri, con le quali venne creato un nuovo ramo della scienza, l'*Ottica elettromagnetica*, dovuto sopratutto ad HERTZ ed al RIGHI. E si noti che la prova della efficienza delle onde corte non solo per scopi scientifici di laboratorio, ma anche per l'invio di segnali, data dai primi tempi della telegrafia senza fili, giacchè, nel 1896, il MARCONI riuscì, in Inghilterra, a trasmettere dei segnali con un oscillatore a onde corte alla distanza di alcuni chilometri, mentre, con un'antenna e con i dispositivi allora usati, la trasmissione non era possibile al di là di qualche centinaio di metri.

§ 7. - Poichè tutto quanto si riferisce alle onde corte, le quali hanno ora radicalmente trasformato la tecnica delle radiosegnalazioni, appassiona gli studiosi di tutto il mondo, sarà bene osservare altresì, che negli anni 1916 e 1917, durante la guerra, il MARCONI ed i suoi Ingegneri utilizzarono, in esperienze fatte in Italia e in Inghilterra a Carnarvon, onde corte di 2 o 3 metri, irradiate da riflettori, e, nel 1919, furono fatte decisive esperienze di trasmissione radiofoniche tra Hendon e Birmingam a 160 chilometri, con onde di 15 metri.

§ 8. - 2° **Periodo.** — L'accennato secondo periodo delle teorie della propagazione si inizia nel 1901 quando il MARCONI riuscì, per il primo, a inviare dei segnali da Poldhu al Capo Breton nel Canadà, vincendo l'ostacolo di circa *400 chilometri*, dovuto alla curvatura della terra. L'attenzione degli uomini di scienza fu diretta a spiegare come mai i raggi hertziani emessi da Poldhu tangenzialmente alla superficie terrestre, e quindi in direzione presso a poco orizzontale, seguissero la curvatura della terra arrivando a 4000 Km. di distanza, invece di propagarsi, come la luce, in linea retta, perdendosi nello spazio. È bene notare che fu appunto in tale epoca che, per spiegare le portate considerevoli dei segnali radiotelegrafici, il prof. KENNELLY (1) e l'HEAVISIDE (2) formularono la loro ipotesi della probabile esistenza, nelle alte regioni dell'atmosfera, di uno strato ionizzato e perciò conduttore capace di riflettere e guidare, seguendo la curvatura della terra, le onde hertziane. Questa ipotesi e le relative teorie che se ne dedussero, ebbero, tuttavia, in quel tempo scarso sviluppo.

§ 9. - Il periodo che và dal 1901 al 1922 e che comprende circa un ventennio, è uno dei più notevoli, sia dal punto di vista dei progressi della tecnica radiotelegrafica realizzati dal MARCONI e da altri inventori, come dal punto di vista delle evoluzioni delle teorie della propagazione, iniziate da HERTZ. In questo periodo, tali teorie possono essere considerate, secondo il LOVE (3) da *tre* punti

---

(1) KENNELLY. Electrical World and Eng., p. 473 (marzo, 1902).

(2) HEAVISIDE. Enciclopedia Britannica, IX ed., p. 215 (dicembre, 1902).

(3) LOVE: *The transmission of Electric waves over the surface of the earth.* Trans. of R. Soc. of London, vol. 215, p. 105 (1915).

di vista: 1°) Generalizzando l'ipotesi di HERTZ che riteneva la terra piana e perfettamente conduttrice, la terra viene considerata come una sfera dotata di una certa conduttività e costante dielettrica, e si determina l'attenuazione che le onde elettriche subiscono, sia quando si considera la terra come un conduttore perfetto (conduttività infinita, resistenza nulla), sia quando si considera come un conduttore imperfetto (conduttività e resistenza aventi valori finiti). Le teorie considerate da questo punto di vista si possono chiamare *teorie della resistenza.* 2°) Ammesso, per le onde elettromagnetiche un ripiegamento intorno agli ostacoli analogo a quello subito dalle onde luminose, si possono investigare le diverse circostanze del fenomeno, in relazione alle dimensioni della terra ed alla lunghezza delle onde elettromagnetiche; si hanno così le *teorie della diffrazione* che si propongono di dare una spiegazione adeguata della possibilità dell'invio dei segnali, seguendo la curvatura della terra. 3°) L'atmosfera viene, infine, considerata non come un dielettrico omogeneo perfettamente isolante, ma come un dielettrico *ionizzato* e quindi dotato di una certa conduttività. È questo il punto di vista delle così dette *teorie atmosferiche,* delle quali il pieno sviluppo è quello costituito dalle recenti teorie elettroioniche che hanno assunto particolare importanza ed estensione in questi ultimi anni, specie dopo le trasmissioni a onde corte.

10. - Le teorie della resistenza e della diffrazione che caratterizzano il 2° periodo, hanno, per punti di partenza, dei postulati abbastanza semplici: *a*) la terra è considerata come un conduttore piano o sferico, dotato di una conduttività finita o infinita, circondato da un dielettrico omogeneo; *b*) l'apparato radiatore di onde è costituito da un osciliatore o *dipolo* hertziano situato nel dielettrico, in prossimità della superficie terrestre; *c*) le onde emesse, costituiscono un sistema di oscillazioni armoniche di unica frequenza e di grande lunghezza rispetto alle onde luminose, ma piccolissima rispetto alle dimensioni della terra. Quando, tuttavia, si cerca di risolvere il problema, apparentemente semplice, di determinare, come aveva fatto HERTZ nel caso della terra piana, il campo magnetico ed elettrico a distanza in un punto qualunque del dielettrico vicino alla superficie, si trovano difficoltà matematiche considerevoli, alcune delle quali sono accennate nel citato lavoro di LOVE, di cui ritengo lo studio utilissimo per i nostri giovani cultori di matematica. È da osservare che queste difficoltà hanno esercitato la sagacia di fisici e matematici insigni come MACDONALD (1), Lord RAYLEIGH (2), POINCARÉ (3),

---

(1) Proc. Royal Soc., vol. 71 (1903), p. 251.

(2) Proc. Royal Soc., vol. 72 (1904), p. 40.

(3) POINCARÉ. Proc. Royal Soc., vol., 72 (1904), p. 42. — Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 29 (1910), p. 169.

ZENNECK [1], SOMMERFELD [2], NICHOLSON [3], AUSTIN [4], RYBCZYNSKI [5], ECCLES [6], LOVE [7], VAN DER POL [8] ecc.

§ 11. - Speciale importanza anche dal punto di vista tecnico, hanno i lavori dello ZENNECK e del SOMMERFELD, il quale, generalizzando i risultati di HERTZ, introdusse i concetti di onde di spazio e onde di superficie, e quello della così detta *distanza numerica*, mostrando il differente carattere della propagazione secondo che la distanza numerica è molto maggiore o molto minore di uno. Una interessante applicazione pratica dei risultati di SOMMERFELD è stata fatta, alla determinazione delle portate delle trasmissioni a piccola distanza, dal Col. SACCO del nostro Genio Militare [9].

§ 12. - 3° **Periodo.** — Il terzo periodo delle teorie della propagazione che va dal 1922 ad oggi, ha inizio nell'epoca dello sviluppo delle onde corte, in cui, conformemente ai risultati già ottenuti dal MARCONI negli anni 1916, 1917 e 1919, ma in opposizione alle teorie generalmente ammesse dai tecnici e dagli uomini di scienza (secondo cui si riteneva come dimostrata la impossibilità delle onde, inferiori a 200 metri, di superare grandi distanze come quelle transoceaniche) si era, dai radio dilettanti, ottenute verso la fine del 1922, le comunicazioni bilaterali, tra l'Europa e gli Stati Uniti, con onda intorno a 200 metri. Le ricerche dei cultori di scienza e di tecnica furono dirette a spiegare la ragione di questo paradosso, e ad investigare le proprietà singolari delle onde corte. Ebbe così origine il 3° periodo delle teorie di propagazione, che è una estensione di quello sopra indicato delle teorie *atmosferiche* ed è caratterizzato da uno studio, più profondo e più completo di quelli fatti anteriormente, delle condizioni fisiche dell'atmosfera e più specialmente della modifica che, sulla conduttività e costante dielettrica della atmosfera, produce la presenza di ioni e di elettroni dovuti alla azione della luce solare o di altre radiazioni. Fu, nel tempo stesso, ripresa la ipotesi dello stato conduttore di KENNELLY ed HEAVISIDE, alla quale in un primo tempo non era stata data la dovuta importanza. Il punto di partenza delle nuove teorie, che chiameremo *elettroniche*, è una ipotesi avanzata dall'ECCLES [10] fin

---

(1) Ann. de Physik (IV), Bd. 23 (1907), p. 864.
(2) Ann. de Physik (IV), Bd. 28 (1909), p. 665.
(3) Phil. Mag., vol. 19 (1910), p. 757.
(4) Bull. of Bur. of Standards, vol. 7, p. 315 (1911).
(5) Ann. de Phys. (IV), Bd. 41 (1913), p. 191.
(6) Proc. Royal Soc., vol. 87 (1912), p. 79.
(7) Phil. trans. of Roy Soc., vol. 215, p. 105 (1915).
(8) Phil. Mag. (6), vol. 38, p. 365 (1919).
(9) Bollettino Radiotelegrafico del R. Esercito (V), Genn. 1927.
(10) Proc. Royal Soc. of London, vol. 87 (1912).

dal 1912, nella quale si ammette che la presenza di elettroni e di ioni nell'atmosfera ne diminuisca la costante dielettrica al disotto del valore uno, che ha nelle condizioni di perfetto isolamento ed aumenta quindi la velocità dell'onda al disopra del valore $c=3.10^{10}$ cm/s relativo al vuoto.

§ 13. - La teoria di ECCLES, notevolmente estesa ed applicata da APPLETON, NICHOLS e SCHELLENG, TAYLOR e HULBURT e dal PEDERSEN nel già citato suo magistrale lavoro, porta alla espressione di due importanti parametri della atmosfera, che sono la costante dielettrica e la conduttività. Se in un mezzo ionizzato vi sono N elettroni o ioni per cm^3, aventi la frequenza di collisione ν fra loro e con le molecole residue neutre, chiamendo e ed m la carica e la massa dell'elettrone o dello ione, $\omega=2\pi f$ la frequenza angolare dell'onda che attraversa il mezzo ionizzato, si trova, esprimendo tutto in unità $e \cdot s$:

$$\varepsilon_s=1-4\pi N\frac{e^2}{m}\frac{1}{\nu^2+\omega^2}, \qquad \sigma_s=N\frac{e^2}{m}\frac{\nu}{\nu^2+\omega^2}. \tag{1}$$

§ 14. - Se si suppone una frequenza nulla di collisione (il che si può approssimativamente ritenere nelle altissime regioni dell'atmosfera) si ha:

$$\varepsilon_s=1-4\pi\frac{Ne^2}{m\omega^2}, \qquad \sigma_s=0. \tag{2}$$

Le formule precedenti permettono di rendersi conto della legge di rifrazione che regola la traiettoria dei raggi hertziani, giacchè se indichiamo con v la velocità delle onde (quella che si chiama velocità ordinaria o di *fase*) relativa ad un dato mezzo di cui l'indice di rifrazione sia n, e c la costante intrinseca dell'etere, numericamente eguale alla velocità della luce o delle onde elettromagnetiche nello spazio vuoto, si ha:

$$v=\frac{c}{n}. \tag{3}$$

§ 15. - Ora se ammettiamo in prima approssimazione la relazione di MAXWELL, $n=\sqrt{\varepsilon}$, e consideriamo un mezzo dielettrico di permeabilità magnetica $\mu=1$, avremo:

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}=\frac{c}{\sqrt{1-4\pi\frac{Ne^2}{m\omega^2}}}. \tag{1}$$

Si vede come la ionizzazione dell'atmosfera diminuendo al disotto del valore normale, sensibilmente eguale ad uno, il potere dielettrico, ne diminuisca altresì l'indice di rifrazione al disotto dell'unità; avremo perciò una velocità di fase *maggiore* di quella c che è relativa al vuoto o allo spazio libero. Quando quindi un raggio hertziano passa da uno strato dell'atmosfera ad uno strato superiore più ionizzato, esso si trova nelle condizioni di un raggio di luce che passa da un dato mezzo in uno meno rifrangente, in cui la velocità della luce è maggiore, e

si comprende come il raggio hertziano emesso da una data stazione trasmittente *T*, sotto un certo angolo di inclinazione rispetto all'orizzonte (fig. 1) si propaghi sensibilmente in linea retta nelle basse regioni dell'atmosfera, fino ad una certa altezza ove la ionizzazione determina il cambiamento dell'indice di rifrazione al disotto di uno. Avremo così, nei vari strati diversamente ionizzati, una serie di deviazioni successive in *O*, *A*, *B* per le quali il raggio si allontanerà sempre più dalla normale fino a raggiungere, in *B*, la condizione critica della riflessione totale, quando cioè l'angolo di incidenza nel mezzo meno ionizzato sarà tale che il corrispondente angolo di rifrazione sia retto. Avrà, allora, luogo il fenomeno della *riflessione totale*, per cui il raggio, non potendo più uscire dallo strato Kennelly-Heaviside, si rifletterà e seguirà un cammino discendente *B*, *C*, *D* ritornando verso terra, e dando luogo ad una specie di miraggio elettromagnetico inverso, per così dire, del miraggio ottico.

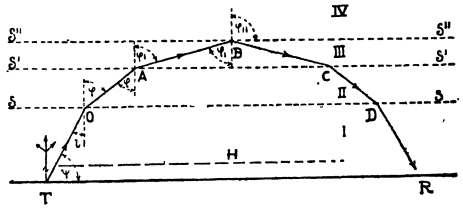

Fig. 1.

§ 16. - Si arriva, in tal modo, a questa conseguenza fondamentale che nella irradiazione di una antenna radiotelegrafica *T*, si hanno due specie di raggi hertziani: uno, che si può dire raggio diretto *TH*, che si propaga in direzione presso a poco parallela alla superficie terrestre, secondo il così detto vettore radiante di POYNTING. L'onda corrispondente è detta dal PEDERSEN *terrestre* o *diretta* (earth bound). Essa è più o meno attenuata per effetto della resistenza, l'attenuazione essendo maggiore quanto più piccola è la lunghezza d'onda, come risulta dai lavori di ZENNECK e di SOMMERFELD. L'altro raggio *TO* è quello più o meno inclinato sull'orizzonte, e corrisponde alla così detta *onda libera*, la quale si propaga in alto, in seno all'atmosfera, ove si rifrange e si riflette nello strato Kennelly-Heaviside.

§ 17. - Con le onde corte al disotto di 200 metri, l'attenuazione dell'onda terrestre è così forte che ha importanza solo a non grande distanza dalla stazione trasmittente. La radiazione che riesce effettiva per grandi distanze è quella prodotta dall'onda libera corrispondente al raggio hertziano più o meno inclinato rispetto all'orizzonte.

§ 18. - Per le onde lunghe, la legge di attenuazione della componente terrestre (earth bound) per onde da 300 a 25.000 m. e per distanze superiori ai 1000 Km. sul mare e di giorno, è espressa dalla nota formula di AUSTIN:

$$E = 120\pi \frac{hI}{\lambda d} \sqrt{\frac{a}{\operatorname{sen} a}}\, e^{-\frac{0{,}0014 d}{\lambda^{0\cdot 6}}}$$

ove E indica il campo elettrico in volt/Km., h, λ, d rispettivamente l'altezza efficace dell'aereo trasmittente, la lunghezza d'onda e la distanza, tutto espresso in Km., α è la distanza angolare delle due stazioni.

§ 19. - **Espressione rigorosa dell'indice di rifrazione.** — Abbiamo già notato come la espressione

$$n = \sqrt{\varepsilon}$$

dell'indice di rifrazione sia approssimata. La espressione rigorosa può ottenersi nel modo seguente, inspirato ai procedimenti del PEDERSEN, opportunamente semplificati [1].

Le equazioni generali di MAXWELL, per un onda elettromagnetica di cui siano E ed H le componenti elettrica e magnetica, in un mezzo omogeneo aventi le costanti σ, ε e μ (conduttività, costante dielettrica e permeabilità magnetica) si possono scrivere nella notazione vettoriale:

(1) $$4\pi I = \text{rot}\, H \quad \text{Equaz. di AMPÈRE,}$$

(2) $$\frac{\partial(\mu H)}{\partial t} = -\text{rot}\, E \quad \text{Equaz. di FARADAY.}$$

La corrente totale I è espressa, trattandosi di mezzo omogeneo, dalla somma scalare della corrente di conduzione σE e della corrente di spostamento, vale a dire da

(3) $$I = \sigma E + \frac{\varepsilon E}{4\pi} \quad \text{in u. e. m.}$$

Mettendo in evidenza le componenti di rot H e rot E, riferite ad un sistema destrorso di assi, le (1) e (2) si possono scrivere, supposto $\mu = 1$:

(1') $$4\pi I = i\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right)$$

(2') $$-\frac{\partial H}{\partial t} = i\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

essendo i, j, k tre vettori unità disposti secondo i tre assi del sistema. Le equazioni precedenti possono riferirsi ad una onda piana linearmente polarizzata il cui vettore elettrico E_z (fig. 2) sia orientato parallelamente all'asse Oz, ed il cui valore sia funzione di x e di t secondo una equazione analoga a quella che si considera nella propagazione di una perturbazione periodica in un conduttore filiforme indefinito, e cioè:

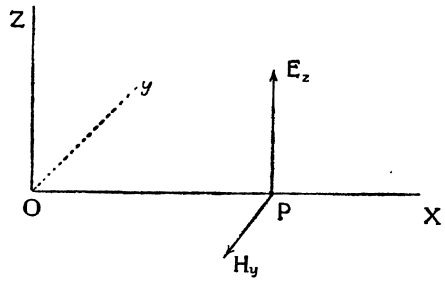

Fig. 2.

(3) $$E_z = A e^{j\omega t - sx}$$

[1] PEDERSEN: *The propagation of electric Waves*, p. 117.

nella quale s è la così detta costante di *propagazione*, e $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione o frequenza angolare.

Poniamo, come nel caso dei conduttori filiformi

$$s = \gamma + j\delta$$

essendo γ la costante di *attenuazione* e δ la *costante d'onda.*

La (3) può scriversi

$$E_z = A e^{j\omega t}, \qquad e^{-(\gamma + j\delta)x} \tag{3'}$$

di cui il termine indipendente dal tempo consta del fattore di attenuazione $e^{-\gamma x}$ che decresce in progressione geometrica quando x cresce in progressione aritmetica e del fattore $e^{-j\delta x}$ il quale si chiama fattore di fase, la quantità δ essendo la costante di *fase* o *costante d'onda.* La ragione di questa denominazione si vede subito osservando che se la distanza x varia per l'intervallo:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\delta} \tag{4}$$

cioè x diviene $x + \frac{2\pi}{\delta}$ l'argomento δx diviene $\delta x + 2\pi$ e il fattore di fase $e^{-j\delta x}$ riprende lo stesso valore. La quantità λ definita dalla (4) definisce quella che si chiama *lunghezza d'onda.*

Ciò posto, osserviamo che un fenomeno periodico il cui periodo sia T, la frequenza $f = \frac{1}{T}$, e la lunghezza d'onda λ, possiede quella che si dice *velocità di fase*, definita da:

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda. \tag{5}$$

Poichè $f = \frac{\omega}{2\pi}$ e per la (4), $\lambda = \frac{2\pi}{\delta}$, si ha pure:

$$v = \frac{\omega}{\delta} = \frac{2\pi f}{\delta}. \tag{6}$$

Se ne deduce che: « Un'onda di pulsazione ω ha, in un mezzo omogeneo, una velocità di fase eguale al quoziente della pulsazione per la costante d'onda ». Tale velocità è quindi variabile, in generale, con la frequenza, vale a dire il mezzo considerato è, come si dice, dotato di dispersione o di deformazione; esso si trova nelle condizioni di un cavo avente una certa capacità, induttanza, resistenza e permittanza costanti, ma non legate da alcuna particolare relazione e nel quale quindi la velocità di una perturbazione elettrica sia funzione della frequenza e della lunghezza d'onda. Cercando di utilizzare i concetti e le notazioni della già citata teoria dei conduttori filiformi, possiamo trovare i valori della costante di attenuazione γ e della costante d'onda δ e vedere quali particolari valori assuma la velocità di fase e l'indice di rifrazione del mezzo.

Dalla espressione (3) della forza elettrica, si desume, tenendo presenti le

equazioni (1′), (2′) di AMPÈRE-FARADAY, che la forza magnetica H_y, dovuta al moto di traslazione della forza elettrica è parallela all'asse delle y; e poichè, per la seconda delle dette equazioni scalari, deve essere, tenendo presente la (3):

$$\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\partial E_z}{\partial x}=-sE_z$$

risulta

$$H_y=-\frac{s}{j\omega}E_z=j\frac{s}{\omega}E_z. \tag{7}$$

Se ora, nelle equazioni di AMPÈRE (1′), consideriamo quella che si riferisce alla proiezione sull'asse Oz, avremo, essendo $H_x=0$:

$$4\pi\sigma E_z+\varepsilon_m\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{\partial H_y}{\partial x}. \tag{8}$$

Ora si ha dalle (3) e (7):

$$\frac{\partial E_z}{\partial t}=j\omega E_z;\qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}=j\frac{s}{x}\frac{\partial E_z}{\partial x};\qquad \frac{\partial E_z}{\partial x}=-sE_z$$

avremo, sostituendo questi valori nella (8)

$$4\pi\sigma E_z+\varepsilon j\omega E_z=-j\frac{s^2}{\omega}E_z$$

da cui

$$\omega(4\pi\sigma+\varepsilon j\omega)=s^2.$$

La costante di propagazione s è quindi tale che

$$s^2=-\varepsilon\omega^2+j4\pi\omega\sigma$$

e quindi

$$s=\gamma+j\delta=\sqrt{-\omega^2\varepsilon+j4\pi\sigma\omega}. \tag{9}$$

Dalla (9) si deduee

$$\gamma^2-\delta^2=-\omega^2\varepsilon$$
$$\gamma^2+\delta^2=\sqrt{(\omega^2\varepsilon)^2+(4\pi\sigma\omega)^2}.$$

Ciò posto, ε e σ rappresentano, nelle formole precedenti, la permeabilità elettrica e la conduttività, in unità elettromagnetiche. Se ε_s ed σ_s esprimono le stesse costanti in unità elettrostatiche, è noto che $\varepsilon_s=c^2\varepsilon$, $\sigma_s=c^2\sigma$, ove $c=3.10^{10}$ rappresenta quella che il LODGE chiama velocità costituzionale dell'etere [1] e che, secondo lo stesso LODGE, ha un valore numerico dello stesso ordine di grandezza della velocità della luce nel vuoto, e del rapporto fra l'unità elettromagnetica ed elettrostatica di carica.

---

[1] LODGE: *The revolution in Physics.* 19th Kelvin Lectures - Journal of Inst. of El. Eng., (october, 1928), p. 1006.

Dalle relazioni precedenti si deduce, con facili trasformazioni:

$$\gamma^2=\omega^2\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}+\left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}-\frac{\varepsilon}{2}\right\}=\frac{\omega^2}{c^2}\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon_s^2}{4}+\left(\frac{2\pi\sigma_s}{\omega}\right)^2}-\frac{\varepsilon_s}{2}\right\} \tag{10}$$

$$\delta^2=\omega^2\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}+\left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}+\frac{\varepsilon}{2}\right\}=\frac{\omega^2}{c^2}\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon_s^2}{4}+\left(\frac{2\pi\sigma_s}{\omega}\right)^2}+\frac{\varepsilon_s}{2}\right\}. \tag{11}$$

Ciò posto, è noto che l'indice di rifrazione di un mezzo nel quale la velocità di fase di una certa radiazione sia v, è uguale al rapporto tra velocità c di propagazione di questa nel vuoto, e la velocità di fase v. Sarà dunque, detto n l'indice di rifrazione

$$n=\frac{c}{v}$$

e poichè chiamando $\omega=2\pi f$ la pulsazione dell'onda considerata δ la costante d'onda del mezzo, si ha per la (6),

$$v=\frac{\omega}{\delta}$$

si ha pure tenendo presente la (11)

$$n=\delta\frac{c}{\omega}=\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}+\sqrt{\frac{\varepsilon_s^2}{4}+\left(\frac{2\pi\sigma_s}{\omega}\right)^2}}. \tag{12}$$

Si vede che l'indice di rifrazione di un mezzo per un onda di pulsazione ω è una funzione piuttosto complessa di questa pulsazione, o della frequenza, della costante dielettrica ε_s del mezzo, e della sua conduttività. Solo per un mezzo perfettamente isolante, di conduttività nulla, si può ritenere valida la relazione

$$n=\sqrt{\varepsilon_s}. \tag{13}$$

In tal caso la velocità di fase è espressa da

$$v=\frac{c}{n}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_s}} \tag{14}$$

e si vede che, in generale, la velocità di fase è funzione della frequenza e quindi della lunghezza d'onda, oltre che delle costanti elettriche σ ed ε del mezzo.

§ 20. - Velocità di fase e velocità di gruppo. — È noto che quando la velocità di fase è funzione della frequenza e della lunghezza d'onda e che in seno ad un mezzo omogeneo, si propagano due onde di lunghezze d'onda λ e $\lambda+d\lambda$ poco differenti, aventi velocità di fase pure poco differenti (fig. 3), queste due onde, interferendo fra loro, danno luogo ad un fenomeno analogo al fenomeno acustico dei battimenti e costituiscono un'onda complessa o *gruppo d'onda*, i cui massimi e minimi

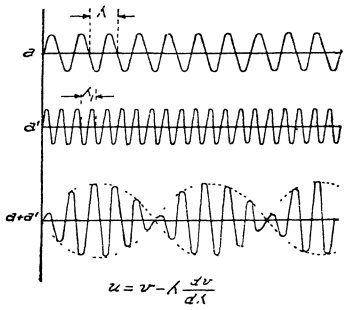

Fig. 3.

si propagano con una velocità u detta *velocità di gruppo*, in generale diversa dalla velocità di fase delle onde componenti. È stato dimostrato da Lord RAYLEIGH che la velocità u del gruppo è espressa da (1)

$$u = \frac{\partial\left(\frac{v}{\lambda}\right)}{\partial\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = v - \lambda\frac{\partial v}{\partial \lambda} \tag{1}$$

in funzione della velocità v delle onde componenti e della legge di variazione di essa con la lunghezza d'onda.

Alla relazione precedente si può arrivare molto semplicemente nel modo seguito anni sono da chi scrive, nelle lezioni tenute presso l'Istituto Militare R. T. (2).

§ 21. - Essendo la velocità v funzione della frequenza f dell'onda, si può trasformare la (1) esprimendo $\frac{\partial v}{\partial f}$ anzichè $\frac{\partial v}{\partial \lambda}$. Ciò può farsi nel seguente modo.

Detta v la velocità di fase, si ha:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

da cui:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{1}{f^2}\left(f - v\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

e quindi:

$$\lambda\frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{v}{1 - \frac{v}{f}\frac{\partial f}{\partial v}}.$$

Sostituendo questo valore nella (1) del § 20, si ottiene:

$$u = \frac{v}{1 - \frac{f}{v}\frac{\partial v}{\partial f}} \tag{1}$$

che corrisponde alla formula data da BREIT e TUVE (3), nella quale figura la pulsazione invece della frequenza.

È da notare che alla formula precedente si arriva immediatamente se si pone la relazione tra velocità di fase e di gruppo sotto la forma adoperata dal prof. APPLETON (4) e cioè

$$\frac{1}{u} = \frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{f}{v}\right). \tag{2}$$

Dalla (1) risulta se la velocità di fase v è indipendente dalla frequenza, vale a dire se il mezzo è senza dispersione, la velocità u di gruppo coincide con la velocità di fase.

---

(1) RAYLEIGH: *Theory of sound* (2th ediz.), vol. 1, pag. 302.

(2) VANNI. Bollettino R. T. del R. Esercito, anno 1922, vol. 1, pag. 20.

(3) BREIT e TUVE. Physical Review, vol. 28, pag. 554 (1926).

(4) E. V. APPLETON. Proc. Phys. Soc., vol. 41, pag. 56, December 1928.

§ 22. - È importante esprimere la velocità del gruppo in funzione dell'indice di rifrazione n del mezzo. Chiamando c la costante caratteristica dell'etere, la velocità di fase v è espressa come sappiamo (§ 19) da

$$v = \frac{c}{n} \tag{1}$$

da cui

$$\frac{\partial v}{\partial f} = -\frac{c}{n^2}\frac{\partial n}{\partial f} = -\frac{v}{n}\frac{\partial n}{\partial f} \tag{2}$$

sostituendo questo valore nella (1) si ottiene

$$u = \frac{v}{1 + \frac{f}{n}\frac{\partial n}{\partial f}} = \frac{c}{n + f\frac{\partial n}{\partial f}} \tag{3}$$

formola importante che esprime la velocità di gruppo in funzione della costante c dell'etere e mostra che quando l'indice di rifrazione del mezzo è costante e indipendente dalla frequenza, la velocità di gruppo è uguale alla velocità di fase ed eguale alla velocità c nello spazio libero vuoto.

Si vede altresì che per una legge di variazione di n con la frequenza, tale che $\frac{\partial n}{\partial f}$ sia positivo, la velocità di gruppo u è *minore* della velocità c nel vuoto.

In generale, la velocità di gruppo può essere eguale, maggiore o minore della velocità di fase v. Ciò dipende dalla legge di variazione dell'indice di rifrazione con la frequenza e con le costanti ε, σ del mezzo. Nel caso nostro si ha per la (12) del § 19:

$$n^2 = \frac{\varepsilon_s}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_s^2}{4} + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}.$$

Se nel mezzo considerato vi sono N elettroni o ioni per cm^3, aventi la frequenza di collisione ν fra loro e con le rimanenti molecole del mezzo, si ha secondo le (1) del § 14:

$$\varepsilon_s = 1 - 4\pi N \frac{e_s^2}{m}\frac{1}{\nu^2 + \omega^2} \qquad \sigma_s = N\frac{e^2}{m}\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2}.$$

Sostituendo questi valori di n, ε e σ nella (3), si trova che la velocità di gruppo non può mai superare la costante c dello spazio libero.

§ 23. - Un caso particolare importante si ha quando si può ritenere il mezzo come un dielettrico perfetto a conduttività nulla, e supporre nulla la frequenza di collisione ν degli ioni o elettroni, il che può, in via approssimativa, ammettersi aver luogo nelle altissime regioni della atmosfera.

La velocità di fase è in tal caso espressa semplicemente da:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{1}$$

Volendo trovare il valore della velocità di gruppo utilizzando la formola di

BREIT e TUVE (§ 21) ove apparisce la variazione di v rispetto alla frequenza, osserviamo che dalle (1) si ricava

$$\frac{\partial v}{\partial f} = -\frac{c}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\frac{d\varepsilon}{df} = -\frac{v}{2\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{df}. \tag{2}$$

Esprimendo ε in funzione di f e supposta nulla la conduttività σ, si ha

$$\varepsilon = 1 - 4\pi\frac{Ne^2}{m\omega^2} = 1 - \frac{Ne^2}{\pi m f^2} \qquad \text{da cui} \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial f} = \frac{2Ne^2}{\pi m f^3}. \tag{3}$$

La (2) diviene quindi

$$\frac{\partial v}{\partial f} = -\frac{v}{\varepsilon}\frac{Ne^2}{\pi m f^3}.$$

Sostituendo questo valore nella formola di BREIT e TUVE e tenendo conto della (3), si ha:

$$u = \frac{v}{1 - \frac{f}{v}\frac{dv}{\partial f}} = v\varepsilon = c\sqrt{\varepsilon} = cn. \tag{4}$$

Dalle (1) e (4) si ricava la relazione rimarchevole

$$uv = c^2$$

vale a dire che la costante intrinseca c dell'etere, numericamente eguale alla velocità delle onde luminose o elettromagnetiche nel vuoto, è, come fa osservare il LODGE [1], media geometrica delle velocità di gruppo e di fase delle onde elettromagnetiche. Essendo ε, e quindi n, minore di uno, la velocità di gruppo u che lo stesso LODGE identifica con la velocità della energia, è *costantemente minore* di c. Al contrario, la velocità di fase v è secondo la (1), *costantemente maggiore* di c. Più piccola è la velocità di gruppo o della energia, più grande è la velocità di fase, che può tendere verso ∞, se u tende verso zero.

Si giunge così al risultato notevole della possibilità della esistenza di velocità *maggiori* di c, vale a dire di quella che si può ritenere come velocità della luce nel vuoto, la quale viene considerata, nella teoria della relatività, come una velocità limite. È stata appunto la esistenza di una velocità di fase maggiore di quella nel vuoto, che è stata invocata da ECCLES per spiegare l'incurvamento subìto da un raggio elettromagnetico propagantesi nelle alte regioni della atmosfera, col conseguente fenomeno del ritorno a terra.

Devesi però osservare che, come nell'ottica ordinaria, si ritiene che, nella propagazione degli impulsi luminosi successivi, quali si hanno nei metodi di FIZEAU, di FOUCAULT e di NEWCOMB, si debba considerare la velocità di *gruppo* e non quella di fase (la quale si ritrova nei metodi basati sulla aberrazione); così nella ottica elettromagnetica si ammette che, nella propagazione di segnali o impulsi

[1] LODGE, loc. cit., p. 106.

elettromagnetici quali si hanno nelle ordinarie trasmissioni radioelettriche, si debba considerare la *velocità di gruppo*, costantemente minore di c, anzichè la velocità di fase. È per questa ragione che la stessa velocità di gruppo, considerata dal LODGE come volocità di propagazione della energia, viene chiamata velocità di segnale, e di essa si giovano PEDERSEN [1] e APPLETON [2] per calcolare il tempo impiegato da un segnale a percorrere un certo cammino in seno alla atmosfera. In guisa che, in seno allo strato ionizzato Kennelly-Heaviside, la velocità del segnale è quella del gruppo u, e il tempo necessario per percorrere la parte incurvata di un certo cammino di cui l'elemento sia ds, è espresso da:

$$t = \int \frac{ds}{u}.$$

§ 24. - **Caratteristiche della traiettoria di un raggio hertziano.** — Considerando, in special modo, l'andamento di quella che abbiamo chiamata onda libera o atmosferica (§ 16), si possono applicare i noti procedimenti della ottica metereologica per calcolare gli elementi della traiettoria di un raggio hertziano TAB (fig. 4) emesso da una stazione trasmittente T sotto un angolo ψ, che chiameremo angolo di elevazione. Si dimostra allora che si chiama n l'indice di rifrazione nel punto più alto A della traiettoria, h l'altezza di questo, R il raggio terrestre, si ha:

$$n = \frac{\cos \psi}{1 + \frac{h}{R}}$$

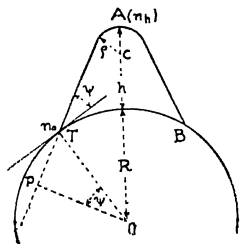

Fig. 4.

la quale vale anche quando $\psi = 0$, cioè quando il raggio è emesso orizzontalmente in direzione tangente alla superficie terrestre.

La curvatura nello stesso punto A (reciproca del raggio di curvatura) è espressa da:

$$a = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial h}.$$

La curvatura nella sommità del raggio, dipende quindi, essenzialmente, dalla legge di variazione dell'indice di rifrazione con l'altezza. Se questa legge di variazione è rapida, sarà grande la curvatura, e, viceversa, questa sarà piccola se detta variazione è lenta.

§ 25. - **Andamento e forme diverse delle traiettorie dei raggi hertziani.** — Ciò posto, è facile vedere che, nelle trasmissioni radiotelegrafiche le quali diano

---

(1) PEDERSEN. Loc. cit., p. 171.

(2) APPLETON. Loc. cit., p. 45 e 56.

luogo, oltre che alla componente terrestre, anche a quella inclinata o libera, si possono avere i seguenti casi, in corrispondenza ai diversi valori dell'angolo di elevazione ψ (fig. 5).

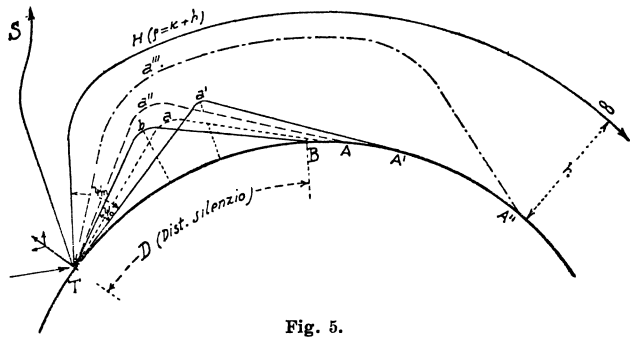

Fig. 5.

1°) $\psi=0$, il raggio è cioè emesso orizzontalmente e si propaga in linea detta secondo la traiettoria Ta', fino a riflettersi totalmente in a', ove la curvatura a precedentemente definita, assume un valore tale da far ritornare il raggio verso la terra nel punto A'.

2°) $\psi=\psi_0$; l'angolo di inclinazione ha il valore critico ψ_0, tale che il raggio riflettendosi in b, assume in questo punto tale curvatura da farlo ritornare nella terra in B alla più *piccola distanza* possibile dalla stazione trasmittente T. Tutti gli altri raggi emessi da T sotto un angolo diverso, sia in più sia in meno, dall'angolo critico ψ_0, ritornano a terra fra B ed A', ad una distanza TA' *maggiore* della distanza minima TB. Se ne deduce che nessun raggio indiretto può penetrare nell'intervallo TB, il quale misura una distanza minima di trasmissione dei raggi indiretti, vale a dire quella che si chiama distanza di evanescenza o di *silenzio* (skip-distance). La distanza di silenzio varia con il valore dell'onda corta e con le condizioni atmosferiche diurne e notturne. Dai risultati delle ricerche teoriche e sperimentali fatte da H. TAYLOR e HULBURT riportate nella fig. 6 (1) risulta che la distanza di silenzio di giorno per l'onda, per esempio, di 16 m. è di 2500 Km., quella dell'onda di 20 m. è di 1300 Km., quella di 32 m. è di 600 Km. e così via fino a non esservi più distanza di evanescenza per onde superiori a 50 metri.

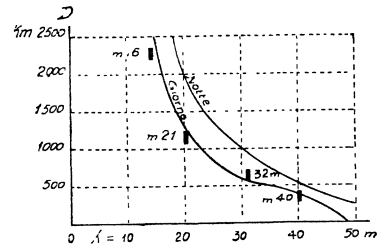

Fig. 6.

3°) $\psi=\psi_m$ per un certo valore ψ_m dell'angolo di elevazione, il raggio segue il cammino TH, presentando, nel vertice H, una curvatura eguale a quella di un cerchio massimo parallelo alla superficie terrestre, cioè di raggio $R+h$. Il raggio hertziano, dopo essersi elevato fino all'altezza h nella atmosfera, prosegue il suo cammino parallelamente alla terra, e può eventualmente ritornare, se le condizioni di ionizzazione dello strato che percorre lo consentono, a terra, sia in

(1) Physical Review, II, vol. 27, p. 189 (1926).

qualche punto intermedio del globo (fig. 7) come B, C, D, sia addirittura alla stazione trasmittente. Si ha così il fenomeno della *eco elettromagnetica* per cui un segnale emesso da una stazione può ritornare al punto di partenza con un ritardo eguale al tempo impiegato dall'onda elettromagnetica nel tragitto percorso. Può anche accadere che il segnale emesso da un'altra stazione B, arrivi in A per due vie, una diretta secondo il cammino 2,2 e l'altra indiretta, dopo un giro intorno al globo. Fenomeni di questo genere sono stati osservati in occasione delle esperienze effettuate dai sig.ri WAGNER e RUKOP per iniziativa della Telefunken.

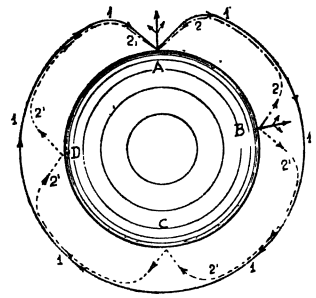

Fig. 7.

4°) $\psi > \psi_m$. Infine, può accadere che il raggio venga emesso sotto un angolo ψ (fig. 8) maggiore di quello ψ_m che corrisponde al raggio avvolgente la terra; se, nel punto più alto, acquista una curvatura maggiore della curvatura nel punto H, il raggio attraversa lo strato di Kennelly-Heaviside e si propaga al di là, dando luogo, in circostanze speciali, ad alcuni singolari fenomeni recentemente osservati da STÖRMER, di echi elettromagnetici a grandi ritardi di tempo, fino a 15 secondi (¹).

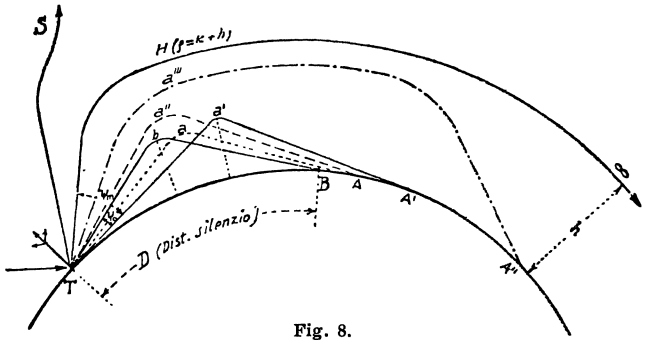

Fig. 8.

§ 26. - Si vede, da quanto precede, come l'atmosfera, con le sue proprietà elettroniche, abbia una parte preponderante nella trasmissione ad onde corte, e come essa determini, oltre alla componente terrestre (earth-bound) della emissione, la componente libera propagantesi nella atmosfera. Se si tiene presente che, secondo il PEDERSEN, l'attenuazione γ di questa, è, per onde molto corte e fra certi limiti, espressa dalla relazione approssimata:

$$\gamma = kN\lambda^2$$

proporzionale cioè al numero N di ioni per cm.³ e al *quadrato* della lunghezza d'onda, si concepisce come l'attenuazione che le onde corte subiscono nell'alta atmosfera possa essere piccola, a differenza della attenuazione delle onde terrestri,

(¹) STÖRMER: *Écho d'ondes électromagnétiques courtes.* Onde électrique, Déc. 1928, p. 530.

determinatl dalle teorie di resistenza (SOMMERFELD, ZENNECK). Si comprende, altresì, la possibilità delle grandi portate, sia per riflessioni multiple di piccola ampiezza (short-step transmissions) (fig. 9), sia per riflessioni multiple di grande ampiezza (long-step transmissions). E si concepisce, infine, come non vi sia limite alla portata delle radiazioni per onde corte, come dimostrano alcune recenti esperienze del MARCONI, potendo esse perfino compiere, come si è veduto, l'intero giro del globo, o anche uscire addirittura dallo strato di HEAVISIDE e dare luogo ai fenomeni osservati dallo STÖRMER, come si è già accennato.

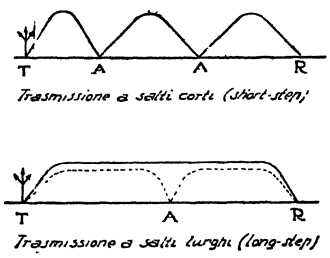

Fig. 9.

§ 27. - **Teorie magneto-ioniche, azione del campo magnetico terrestre.** — In quanto precede, non si è tenuto conto dell'azione che il campo magnetico terrestre esercita sulla traiettoria degli elettroni vaganti nell'alta atmosfera, quando questa è attraversata da onde elettromagnetiche. Tale azione che rientra nel dominio della fisica pura (magneto-ionica) è stata considerata principalmente dai tecnici inglesi ed americani, e sopratutto da APPLETON e BARNETT (1) e da NICHOLS e SCHELLENG (2) per spiegare il fatto, apparentemente paradossale, ma dimostrato dalla esperienza, della diminuzione brusca che la portata delle onde medie tra 150 e 400 subisce intorno ad un certo valore critico, prossimo a 200 m. (fig. 10).

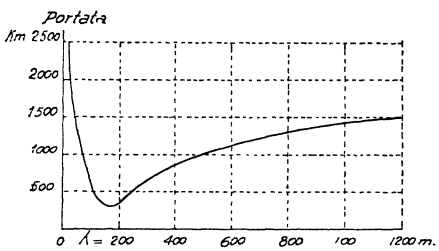

Fig. 10.

La teoria dimostra anzitutto che un elettrone di costanti e ed m (carica e massa) animato della velocità v, supposta per semplicità normale al campo magnetico terrestre H, descrive una traiettoria circolare con una frequenza angolare propria (frequenza critica) espressa:

$$\omega_0 = \frac{eH}{m}.$$

Considerando un elettrone per il quale, come è noto, si ha:

$$\frac{e}{m} = 1.8 \times 10^7 \quad \text{u. e. m.}$$

posto nel campo magnetico terrestre $H = 0{,}5$, si trova con la formula prece-

(1) Electrician, Aprile 1925, p. 328.
(2) The Bell System Tecn. Journ., vol. 4 (1925).

dente, $\omega_0 = 9 \times 10^6$, cui corrisponde la frequenza critica $f_0 = 1.6 \times 10^6$ cicli/s e la lunghezza d'onda:

$$\lambda_0 \cong 214^m.$$

Un'onda di questa lunghezza, la quale investa un complesso di elettroni situati nell'alta atmosfera in un campo magnetico di valore prossimo a 0,5 Gauss, determina quindi, per effetto di risonanza, una violenta agitazione degli elettroni stessi, diminuendo, in conseguenza, la propria energia; la portata dell'onda risulta così diminuita.

§ 28. - Passando ora ad investigare analiticamente l'azione del campo terrestre, si trova che questa azione è diversa secondo che l'onda si propaga parallelamente al campo (cioè in direzione presso a poco da nord a sud) ovvero in direzione normale, da est ad ovest. Supponendo l'onda incidente polarizzata linearmente in un certo piano, si può, come è noto, supporla costituita da due onde polarizzate circolarmente, una destrorsa l'altra sinistrorsa. Scrivendo le equazioni generali del moto degli ioni in un campo magnetico si trovano, per le onde polarizzate circolari, tre coppie di valori diversi ε_1 ed ε_{11}, σ_1 e σ_{11}, n_1 e n_{11}, rispettivamente per la costante dielettrica, la conduttività e l'indice di rifrazione del mezzo. Le espressioni di questi valori sono assai complicate e vengono date dal PEDERSEN sotto forma di monogrammi.

Nel caso di una propagazione parallela al campo terrestre, e supposto che si possa trascurare la frequenza di collisione, ritenendo nulla la conduttività, i valori approssimati degli indici di rifrazione per le due onde sopra indicate, sono:

$$(1) \qquad \begin{cases} n_1^2 = \varepsilon_1 = 1 - \dfrac{Ne^2}{\pi m} \dfrac{\lambda^2}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_0}} \\[2ex] n_{11}^2 = \varepsilon_{11} = 1 - \dfrac{Ne^2}{\pi m} \dfrac{\lambda^2}{1 + \dfrac{\lambda}{\lambda_0}} \end{cases}$$

ove λ è l'onda di trasmissione, e λ_0 l'onda critica di risonanza.

§ 29. - Queste formule sono state adoperate da TAYLOR e HULBURT per il calcolo degli indici di rifrazione dello strato di Kennelly-Heaviside, e per onde di trasmissione comprese fra 20 m. e 60 m. È da notare, però, che tali formule sono approssimate, giacchè non tengono conto della frequenza di collisione degli elettroni; pure essendo valevoli fra i limiti sopra indicati, non valgono per valori dell'onda di trasmissione prossimi al valore critico $\lambda = \lambda_0$, giacchè condurrebbero a valori infiniti della costante dielettrica ε_1 e dell'indice di rifrazione n_1. La formula completa indicata dal PEDERSEN, tenendo conto della frequenza di collisione, conduce invece a valori perfettamente attendibili.

Risultati e formule analoghe si hanno nel caso della propagazione normale al meridiano magnetico.

§ 30. - **Conclusione.** — Il problema della traiettoria di un raggio hertziano per onde lunghe, medie e corte è stato magistralmente trattato, con procedimenti rigorosi, dal PEDERSEN, alla luce delle moderne teorie elettro e magneto-ioniche. Il problema è assai complicato e lascia insoluti o dubbi molti punti, specie quelli che si riferiscono alla costituzione e conoscenza delle costanti fisiche dell'alta atmosfera, costituzione che ci è ancora, in gran parte, ignota e per la quale occorre ancora il concorso delle discipline che non si ritenevano in un primo tempo necessarie alla radiotecnica, quali la meteorologia, la eliofisica e la geofisica.

Il problema è quindi arduo, perchè oltre alle difficoltà intrinseche sue, comprende quelle inerenti alla tecnica radio-elettrica ed alla scienza dell'ottica elettromagnetica. Poichè, tuttavia, tecnica e scienza sono entrambre glorie italiane, la prima di GUGLIELMO MARCONI, la seconda di AUGUSTO RIGHI, le cui alte tradizioni sono degnamente continuate in questo stesso Ateneo dal prof. MAJORANA, parta da noi l'augurio che il difficile problema affrontato dal PEDERSEN, trovi, nel nostro paese, la sua completa soluzione.